

ANÁLISIS CINEMÁTICO Y SIMULACIÓN DE UN MANIPULADOR PLANAR DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

¹ *Enrique García Trinidad, enrique.g.t@huixquilucan.tecnm.mx

² Cesar Felipe Juárez Carrillo, cesar.j.c@huixquilucan.tecnm.mx

³ Emmanuel Arcos Hernández, emmanuel.a.h@huixquilucan.tecnm.mx

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis cinemático detallado de un manipulador planar de 3 grados de libertad, un sistema fundamental en robótica. La finalidad principal es desarrollar y validar rigurosamente los modelos cinemáticos directo e inverso. En la metodología, se deriva el modelo cinemático directo mediante un enfoque geométrico intuitivo. Para el problema inverso, se desarrolla una solución analítica en forma cerrada, desacoplando la posición de la muñeca para obtener los ángulos articulares. La contribución central es la validación robusta del modelo, pues la solución analítica se compara con los resultados de diez algoritmos numéricos iterativos (incluyendo Newton-Raphson y Levenberg-Marquardt) implementados en la Robotics Toolbox (RTB) para Python. Los resultados, presentados en tablas comparativas para tres poses de prueba, demuestran que los métodos numéricos convergen a las soluciones exactas calculadas por el modelo analítico. Esta validación no solo confirma la correctitud del modelo propuesto, sino que también ilustra experimentalmente la naturaleza de múltiples soluciones del problema de cinemática inversa. El modelo verificado sirve como una base sólida para futuras aplicaciones de control y planificación de trayectorias.

PALABRAS CLAVE

Cinemática
inversa
Robotics Toolbox
Validación
numérica

ABSTRACT

This paper presents a detailed kinematic analysis of a 3-degree-of-freedom planar manipulator, a fundamental system in robotics. The main purpose is to rigorously develop and validate the forward and inverse kinematic models. In the methodology, the forward kinematic model is derived using an intuitive geometric approach. For the inverse problem, a closed-form analytical solution is developed by decoupling the wrist position to obtain the joint angles. The central contribution is the robust validation of the model, as the analytical solution is compared against the results of ten iterative numerical algorithms (including Newton-Raphson and Levenberg-Marquardt) implemented in the Robotics Toolbox (RTB) for Python. The results, presented in comparative tables for three test poses, demonstrate that the numerical methods converge to the exact solutions calculated by the analytical model. This validation not only confirms the correctness of the proposed model but also experimentally illustrates the multiple-solution nature of the inverse kinematics problem. The verified model serves as a solid foundation for future control and trajectory planning applications.

KEYWORDS

Inverse
kinematics
Robotics Toolbox
Numerical
validation

¹ Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan (Docente)

² Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan (Docente)

³ Tecnológico de Estudios Superiores de Huixquilucan (Docente)

*Autor para correspondencia

I. INTRODUCCIÓN

Los manipuladores robóticos representan una tecnología fundamental en la automatización industrial y la investigación científica, desempeñando un papel crucial en una vasta gama de aplicaciones que abarcan desde líneas de ensamblaje de alta precisión y procedimientos quirúrgicos mínimamente invasivos hasta la exploración de entornos remotos y peligrosos (Wang et al. 2017). La eficacia de un robot en cualquiera de estas tareas depende intrínsecamente de su capacidad para controlar la posición y orientación de su efector final, que es el componente que interactúa directamente con el entorno, de manera precisa, rápida y fiable. Esta capacidad de control, a su vez, se fundamenta en la existencia de un modelo matemático que describe con exactitud el comportamiento del sistema robótico (Suarez et al. 2021).

Este trabajo se centra en el análisis de un manipulador planar de tres grados de libertad (3-GDL). Aunque esta arquitectura puede parecer simple, constituye un sistema canónico que encapsula los desafíos fundamentales inherentes al modelado de manipuladores seriales, incluyendo las no linealidades trigonométricas en su cinemática y los complejos acoplamientos inerciales y de velocidad en su dinámica. Además, esta configuración es representativa de las etapas de posicionamiento primarias en robots industriales más complejos, como el Cincinnati Milacron T3, lo que subraya su relevancia práctica y pedagógica (Zhuang et al. 1992).

Los objetivos principales de este estudio son los siguientes:

- Derivar un modelo cinemático completo para el manipulador, empleando un enfoque geométrico, que proporcione una comprensión intuitiva.
- Resolver el problema de la cinemática inversa de forma analítica, identificando y discutiendo la existencia de múltiples configuraciones para una pose dada del efector final.
- Validar la exactitud y el poder predictivo del modelo cinemático mediante simulaciones numéricas implementadas en un entorno de software estándar en la comunidad robótica, el Robotics Toolbox para Python.

Para alcanzar estos objetivos, el artículo se estructura de la siguiente manera. La Sección 2 detalla la derivación del modelo cinemático, cubriendo tanto el problema directo como el inverso. La Sección 3 describe el proceso de simulación y validación de ambos modelos, presentando los resultados numéricos y gráficos que confirman su corrección. Finalmente, la Sección 4 resume las contribuciones del trabajo y propone líneas de investigación futuras.

II. METODOLOGÍA

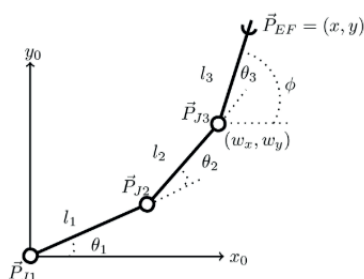
Análisis cinemático directo

El problema de la cinemática directa se ocupa de determinar la posición y orientación del efector final de un robot dadas las variables de sus articulaciones (Yonezawa et al. 2024). Para un manipulador serial, esto implica establecer una relación funcional que mapea un vector de posiciones de articulación, conocido como el espacio de configuración o espacio de articulaciones, a un vector que describe la pose del efector final en un sistema de coordenadas cartesiano, conocido como el espacio de tarea o espacio de trabajo. Este análisis es un requisito fundamental para cualquier tarea robótica, ya que permite al sistema predecir el resultado de los movimientos de sus articulaciones (Gonçalves et al. 2022). Aunque conceptualmente sencillo, la derivación de las ecuaciones de cinemática directa exige un enfoque preciso y sistemático para modelar con exactitud la geometría del movimiento.

En esta sección se desarrolla el modelo cinemático directo para un manipulador planar de 3-GDL. Esta arquitectura específica, aunque simple, es fundamental en la robótica, representando a menudo los grados de libertad de posicionamiento primarios en manipuladores industriales más complejos como el Cincinnati Milacron T3 (Maciel et al. 1984). Para esta derivación, se emplea un enfoque geométrico, que se basa en la trigonometría básica para proporcionar una comprensión clara e intuitiva de la estructura del manipulador. El objetivo de este método es proporcionar no solo el modelo matemático correcto, sino también una apreciación más profunda de la interacción entre la intuición geométrica y el modelado de robots.

Figura 1.

Cadena cinemática del manipulador.



El mecanismo en cuestión es uno de cadena abierta en serie compuesto por tres eslabones rígidos conectados por tres articulaciones de revolución, como se muestra en la Figura 1. El movimiento del mecanismo está restringido a un único plano bidimensional. Los ejes de las tres articulaciones de revolución son paralelos entre sí y perpendiculares a este plano de movimiento.

Para formalizar la descripción del manipulador, se defi

nen sus parámetros constituyentes y los sistemas de coordenadas utilizados para medir su estado.

De esta forma, la geometría del manipulador se define por un conjunto de longitudes de eslabón constantes y ángulos de articulación variables, que se describen a continuación:

- Las longitudes de los eslabones (l_1, l_2, l_3) son los tres parámetros escalares que definen las dimensiones físicas del robot. La longitud l_i representa la distancia entre el eje de la articulación i y el eje de la articulación $i+1$. La longitud del último eslabón, l_3 , se define como la distancia desde el eje de la tercera articulación hasta un punto de referencia específico en el efector final.
- Las variables de articulación ($q=[1,2,3]^T$) son las coordenadas generalizadas que definen de forma única la configuración del manipulador. Para este manipulador, todas las variables de articulación son ángulos de rotación. Por convención, 1 es el ángulo absoluto del primer eslabón medido con respecto a una dirección de referencia fija. Los ángulos posteriores, 2 y 3 , son ángulos relativos medidos entre eslabones adyacentes. Una rotación positiva se define típicamente por la regla de la mano derecha sobre el eje de la articulación.
- El sistema de referencia base se establece como un sistema de referencia inercial fijo, denotado como $\{0\}$ con ejes (x_0, y_0) , en la base del manipulador. El origen de este sistema coincide con el eje de la primera articulación de revolución. El eje x_0 sirve como referencia desde la cual se mide el primer ángulo de articulación, 1 .
- La posición y orientación del efector final en el plano se describen en relación con el sistema de referencia base. La posición viene dada por las coordenadas cartesianas (x, y) del punto de la herramienta. La orientación, denotada por θ , es el ángulo absoluto de la línea central del último eslabón medido desde el eje x_0 . La combinación (x, y, θ) constituye la pose del efector final en el espacio de tarea.

El enfoque geométrico proporciona el camino más directo e intuitivo para derivar las ecuaciones de cinemática directa para un manipulador planar. Este método se basa en el principio de la suma de vectores, donde la posición del efector final se encuentra sumando los vectores que representan cada eslabón en el sistema de coordenadas base. La orientación y longitud de cada vector de eslabón están determinadas por la suma acumulada de los ángulos de las articulaciones.

Si se denota la posición del efector final como el vector $\vec{P}_{EF}$ y las posiciones de las articulaciones como $\vec{P}_{J1}$, $\vec{P}_{J2}$ y $\vec{P}_{J3}$. El origen del sistema de referencia base está en $\vec{P}_0 = [0, 0, 0]^T$.

En referencia a la posición de la articulación 2 ($\vec{P}_{J2}$) el primer eslabón tiene una longitud l_1 y está orientado a un ángulo θ_1 con respecto al eje x_0 . La posición de la segunda articulación es, por lo tanto, el punto final de este vector de eslabón, como se muestra en la Ecuación (1)

De acuerdo a la posición de la articulación 3 ($\vec{P}_{J3}$), el segundo eslabón tiene una longitud l_2 . Su orientación es relativa al primer eslabón, dada por el ángulo θ_2 . Por lo tanto, su orientación absoluta con respecto al eje x_0 es la suma de los dos primeros ángulos de articulación, $\theta_1 + \theta_2$. El vector que representa el segundo eslabón, desde la articulación 2 hasta la articulación 3, es mostrado en la Ecuación 2.

$$\vec{V}_2 = [l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (2)$$

La posición de la tercera articulación es la suma vectorial de las posiciones de los dos primeros eslabones, como indica la Ecuación 3.

$$\vec{P}_{J3} = \vec{P}_{J2} + \vec{V}_2 = [l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (3)$$

Finalmente, la posición del efector final ($\vec{P}_{EF}$) tiene como referencia el tercer eslabón, cuya longitud l_3 y orientación es relativa al segundo eslabón, dada por θ_3 . Su orientación absoluta es la suma de los tres ángulos de articulación, $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. La Ecuación 4 muestra el vector que representa el tercer eslabón, desde la articulación 3 hasta el efector final.

$$\vec{V}_3 = [l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \quad (4)$$

La Ecuación 5 indica la posición final del efector final, que es la suma de los tres vectores de los eslabones.

$$\vec{P}_{EF} = [x, y] = \vec{P}_{J3} + \vec{V}_3 \quad (5)$$

Esta suma vectorial produce las ecuaciones explícitas de cinemática directa para la posición cartesiana del efector final, mostradas en el conjunto de Ecuaciones 6.

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (6)$$

Para abreviar en las secciones siguientes, adoptaremos la notación abreviada $c_i = \cos(\theta_i)$, $s_i = \sin(\theta_i)$, $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, y $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$, etc. El conjunto de Ecuaciones 6 se pueden reescribir entonces como el par de Ecuaciones 7 y 8.

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123}$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123}$$

La orientación del efector final, mostrada en la Ecuación 9 se define como el ángulo que su línea central forma con el eje x_0 positivo. Como se estableció en la derivación vectorial, la orientación absoluta del último eslabón es la suma acumulada de todos los ángulos de las articulaciones precedentes. Esto es una consecuencia directa de la estructura de cadena

en serie, donde la rotación de cada articulación se construye sobre la orientación del eslabón anterior. $\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

Las tres Ecuaciones 7, 8 y 9, dos para la posición y una para la orientación respectivamente, constituyen el modelo cinemático directo del manipulador derivado mediante el método geométrico. Se proporciona un mapeo explícito, aunque no lineal, desde las variables del espacio de articulaciones $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, a la pose del espacio de tarea (x, y, ϕ) .

Análisis cinemático inverso

El problema de la cinemática inversa es el inverso del problema de la cinemática directa, es decir, determinar el conjunto de variables de articulación, $q = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ que colocarán el efector final del manipulador en una posición y orientación deseadas, (x, y, ϕ) . Esta capacidad es fundamental para la robótica, ya que la mayoría de las tareas se especifican en términos del comportamiento deseado del efector final en el mundo, y no en términos de los ángulos de articulación requeridos.

A diferencia del problema de la cinemática directa, que típicamente tiene una solución única y en forma cerrada para los manipuladores en serie, el problema de la cinemática inversa es significativamente más complejo. Las ecuaciones que lo gobiernan son no lineales y trigonométricas, lo que puede llevar a varios desafíos.

La idea clave es que, dada la posición (x, y) y la orientación deseadas del efector final, se puede determinar la posición de la muñeca, que se denota como (w_x, w_y) . El efector final se encuentra a una distancia l_3 de la muñeca en la dirección especificada por el ángulo ϕ , por lo tanto, para encontrar la posición de la muñeca, simplemente se retrocede desde la posición del efector final por un vector de longitud l_3 orientado en el ángulo ϕ . Las coordenadas de la muñeca son mostradas en la Ecuación 10. $w_x = x - l_3 \cos(\phi)$ $w_y = y - l_3 \sin(\phi)$

(10)

Este paso desacopla efectivamente el problema, por lo que el resto del análisis consiste en encontrar los ángulos de articulación θ_1 y θ_2 para un manipulador de 2 eslabones con longitudes l_1 y l_2 que posicione su punta en las coordenadas de la muñeca calculadas (w_x, w_y) . De esta forma, el conjunto de Ecuaciones 11 describe este desacople.

$$w_x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \quad w_y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \quad (11)$$

Para resolver para θ_2 , se elevan al cuadrado y se suman el conjunto de Ecuaciones 11.

$$w_x^2 + w_y^2 = (l_1 c_1 + l_2 c_{12})^2 + (l_1 s_1 + l_2 s_{12})^2$$

La Ecuación 12 se simplifica usando la ley de los cosenos para el triángulo formado por el origen, el codo y la muñeca.

$$w_x^2 + w_y^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos(\theta_2)$$

Después, se despeja $\cos(\theta_2)$ de la Ecuación 13.

$$\cos(\theta_2) = \frac{w_x^2 + w_y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

Dado que en la Ecuación 14, $\cos(\theta_2) = \cos(-\theta_2)$, hay dos posibles soluciones para θ_2 , correspondientes a las configuraciones de codo arriba y codo abajo. Sea $D = \cos(\theta_2)$. Si $|D| > 1$, el punto de la muñeca es inalcanzable y no existe una solución real. De lo contrario, las dos soluciones son θ_2 y $-\theta_2$.

Una vez que se elige un valor para θ_2 , se puede resolver para θ_1 . Si se reescriben el conjunto de Ecuaciones 11:

$$w_x = (l_1 + l_2 c_2) c_1 - (l_2 s_2) s_1 \quad w_y = (l_2 s_2) c_1 + (l_1 + l_2 c_2) s_1 \quad (15)$$

Se obtienen el conjunto de Ecuaciones 15, adicionalmente si $k_1 = l_1 + l_2 c_2$ y $k_2 = l_2 s_2$; se resuelve este sistema para c_1 y s_1 obteniéndose las expresiones mostradas en el conjunto de Ecuaciones 16.

$$c_1 = \frac{w_x k_1 + w_y k_2}{k_1^2 + k_2^2} \quad s_1 = \frac{w_y k_1 - w_x k_2}{k_1^2 + k_2^2} \quad (16)$$

Finalmente, θ_1 se puede encontrar usando la función arcotangente de dos argumentos, que maneja correctamente todos los cuadrantes: $\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$

Nótese que para cada una de las dos opciones para θ_2 (es decir, θ_2 y $-\theta_2$), se calculará un valor único para θ_1 , mostrado en la Ecuación 17. Con θ_1 y θ_2 determinados, encontrar θ_3 es trivial a partir de la Ecuación 9.

$$\theta_3 = \phi - \theta_1 - \theta_2$$

La Ecuación 18 debe calcularse para cada par de soluciones (θ_1, θ_2) .

Solución numérica

Los métodos numéricos ofrecen un enfoque alternativo a las soluciones analíticas y son caracterizados por algoritmos iterativos que refinan progresivamente una suposición inicial para encontrar los ángulos de las articulaciones y minimizar el error entre la pose actual y la deseada. Esto transforma eficazmente el problema de la CI en un problema de optimización, donde el objetivo es minimizar una función de costo que representa el error de la pose.

La principal ventaja de los métodos numéricos radica en su generalidad y versatilidad. Son altamente aplicables a diferentes tipos de manipuladores con estructuras cinemáticas complejas, como son los manipuladores redundantes. Todo esto sin requerir derivaciones matemáticas específicas del mecanismo más allá de la cinemática directa. Esto los convierte en una buena opción cuando se trata de manipuladores complejos o redundantes donde las soluciones analíticas son intratables (Liu et al. 2017). Los métodos numéricos más comunes son:

Newton-Raphson, sin pseudoinversa Jacobiana (NR pse=0) o con pseudoinversa Jacobiana (NR pse=1), es un método que ajusta iterativamente los ángulos de las articulaciones resolviendo los cambios de velocidad de las articulaciones utilizando la pseudoinversa Jacobiana para reducir el error. Es conocido por su tasa de convergencia cuadrática para funciones no lineales.

Gauss-Newton, sin pseudoinversa Jacobiana (GN pse=0) o con pseudoinversa Jacobiana (GN pse=1), es una extensión del método de Newton que aproxima la matriz Hessiana utilizando la matriz Jacobiana.

Levenberg-Marquardt (LM), es un algoritmo de optimización híbrido que combina las fortalezas de Gauss-Newton y el gradiente descendiente, que emplea un factor de amortiguación para controlar el tamaño del paso, lo que mejora significativamente la robustez, especialmente al acercarse a singularidades. Algunas de estas versiones pueden ser las de Wampler (LMW), que permite tratar singularidades de forma dinámica, a través de la introducción de un factor de amortiguamiento que puede ser de 1×10^{-4} o de 1×10^{-6} , considerando que un factor de amortiguamiento mayor dirige a una solución más estable, pero de forma más lenta. Otro método numérico es el de Chan (LMC), que usa un factor de amortiguamiento fijo y que puede ser de 1.0 o 0.1 y que provee al método de una estabilidad de poder resolver singularidades y detectar objetivos que físicamente el manipulador no puede alcanzar. Finalmente, Sugihara introduce otra variante de LM (LMS) que provee al método LM de la posibilidad de converger bajo diferentes condiciones a través de un factor específico o sesgo que puede ser de 0.001 o 0.0001.

Las soluciones numéricas se obtuvieron utilizando la librería Robotics Toolbox versión 1.1.1 de Peter Corke (Haviland and Corke 2024), sobre Python versión 3.11. El entorno de ejecución para las simulaciones fue una computadora MacBook Air 2020.

III. RESULTADOS O AVANCES

Para las siguientes poses $\vec{P}_{EF} = [x, y]^T$ mostradas en la Tabla 1, se da solución a la cinemática inversa del manipulador, a través de los métodos descritos anteriormente. La Tabla 2 muestra la solución a las poses descritas. La Figura 2 muestra las poses del manipulador en cada una de las soluciones.

Tabla 1.
Diferentes poses a resolver

Pose	x	y
1	110.5	284.1
2	414.	92.06
3	139.	-41.07
	8	

Tabla 2.

Soluciones a las poses del manipulador

Pose Método	1 θ_1	1 θ_2	1 θ_3	2 θ_1	2 θ_2	2 θ_3	3 θ_1	3 θ_2	3 θ_3
Análítico	0.3067	1.352	0.6457	0.282	-0.4797	0.9167	-0.3922	2.462	2.913
NR pse=0	1.431	-1.352	-4.057	0.282	-0.4797	0.9167	-0.3922	2.462	-3.37
GN pse=0	-4.853	-7.635	2.226	0.282	-0.4797	-5.367	-4.981	-2.462	-6.424
NR pse=1	0.3067	1.352	0.6457	-0.1278	-5.803	0.3671	-6.675	2.462	-3.37
GN pse=1	-5.976	1.352	-5.638	0.282	-0.4797	0.9167	-6.675	-3.822	2.913
LMW 1e-4	1.431	-1.352	2.226	-6.411	0.4797	0.3671	1.302	-8.745	-0.1407
LMW 1e-6	-4.853	-1.352	-4.057	0.282	-0.4797	-5.367	-0.3922	-3.822	2.913
LMC 1.0	1.431	-1.352	2.226	-0.1278	0.4797	0.3671	1.302	-2.462	-0.1404
LMC 0.1	1.431	-1.352	2.226	-0.1278	0.4797	0.3671	-0.3922	-3.822	-3.37
LMS 0.001	0.3067	1.352	0.6458	-0.1278	0.4797	0.3671	-0.3922	2.462	2.913
LMS 0.0001	0.3067	1.352	0.6455	-0.1279	0.4797	0.3671	1.302	-2.462	-0.1408

Al analizar los resultados presentados en la Tabla 2, se puede realizar una comparación directa entre las soluciones de cinemática inversa obtenidas por el método analítico propuesto y las soluciones generadas por los diversos algoritmos numéricos implementados en la Robotics Toolbox (RTB), cuya versión original fue lanzada para Matlab (Corke 1996) y que estableció los algoritmos y la estructura que la versión de Python heredó.

La observación principal es que los resultados numéricos de la RTB validan la correctitud del modelo analítico. Para cada una de las tres poses evaluadas, al menos uno de los métodos numéricos converge a la solución exacta encontrada por el método analítico.

Sin embargo, la tabla también ilustra de manera efectiva la existencia de múltiples soluciones para el problema de la cinemática inversa. Los diferentes algoritmos numéricos, partiendo de sus condiciones iniciales y empleando distintas estrategias de optimización, convergen a configuraciones distintas que satisfacen la misma pose del efector final. Un desglose por pose revela lo siguiente:

Para la Pose 1 ($x=110.5, y=284.1$), la solución analítica ($\theta_1=0.3067, \theta_2=1.352, \theta_3=0.6457$) es replicada de forma precisa por el método NR pse=1. Los métodos LMS 0.001 y LMS 0.0001 también convergen a esta misma solución, con diferencias mínimas en θ_3 (0.6458 y 0.6455, respectivamente), probablemente debidas a la tolerancia de convergencia numérica. Otros métodos, como NR pse=0 o LMC 1.0, encuentran una solución alternativa válida, lo que corresponde a una configuración diferente de codo abajo en lugar de codo arriba.

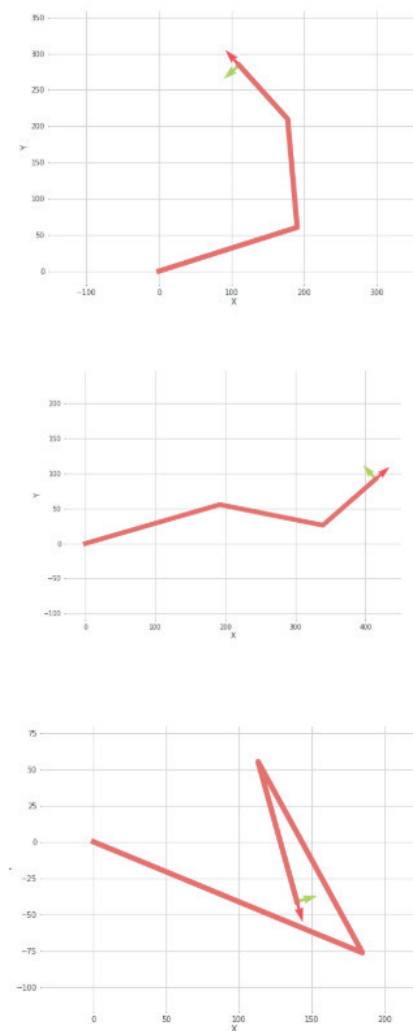
Para la Pose 2 ($x=414.4, y=92.06$), la solución analítica ($\theta_1=0.282, \theta_2=-0.4797, \theta_3=0.9167$) es encontrada exactamente por los métodos NR pse=0 y GN pse=1. Es notable que otros métodos, como GN pse=0 y LMW 1e-6, encuentran la misma solución para θ_1 y θ_2 , pero reportan $3\pi-5.367$. Esta no es una solución diferente, sino una representación equivalente del mismo ángulo, ya que $0.9167-2\pi \approx -5.3665$. Finalmente, los métodos como LMC y LMS convergen a una solución completamente distinta para esta pose

Para la Pose 3 ($x=139.8, y=-41.07$), la solución analítica ($\theta_1=-0.3922, \theta_2=2.462, \theta_3=2.913$) es igualada perfectamente por el método LMS 0.001. Al igual que en la Pose 2, se observan soluciones equivalentes con ángulos envueltos. Por ejemplo, NR pse=1 y GN pse=1 encuentran la misma solución para θ_2 y θ_3 , pero reportan $1 \approx -6.675$ (donde $-0.3922 - 2 \approx -6.6754$). De manera similar, LMW $1e-6$ encuentra la misma solución para θ_1 y θ_3 , pero reporta $2\pi \approx -3.822$ (donde $2.462 - 2\pi \approx -3.821$).

En conclusión, la comparación con los métodos numéricos de la RTB sirve como una validación robusta del modelo analítico desarrollado. La diversidad de los resultados numéricos no indica un error; sino que confirma experimentalmente la naturaleza de múltiples soluciones del problema de la cinemática inversa para este manipulador.

Figura 2.

Tres poses del manipulador, de izquierda a derecha Pose 1 y Pose 2, abajo Pose 3.



IV. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un análisis cinemático detallado y una simulación de un manipulador planar de tres grados de libertad. El estudio cumplió con sus objetivos principales al derivar exitosamente el modelo cinemático directo, presentando un enfoque geométrico intuitivo. Adicionalmente, se desarrolló una solución analítica en forma cerrada para el complejo problema de la cinemática inversa, desacoplando la posición de la muñeca para resolver los ángulos de las articulaciones.

La contribución central de este trabajo radica en la validación robusta de los modelos propuestos. Mediante la simulación numérica con la librería Robotics Toolbox (RTB) para Python, se realizó una comparación directa entre la solución analítica derivada y un conjunto de algoritmos numéricos iterativos estándar de la industria, como Newton-Raphson, Gauss-Newton y Levenberg-Marquardt.

Los resultados de esta comparación confirman dos puntos clave:

Los métodos numéricos de la RTB convergieron a las soluciones exactas calculadas por el modelo analítico, sirviendo como una validación robusta de la correctitud de las ecuaciones desarrolladas.

La diversidad de resultados obtenidos por los distintos algoritmos numéricos ilustró de manera experimental la naturaleza de múltiples soluciones del problema de la cinemática inversa, identificando configuraciones alternativas (como codo arriba/abajo) y representaciones angulares equivalentes (θ vs. $\theta + 2\pi$).

El modelo matemático exacto y verificado en este estudio sirve como una base fundamental para futuras aplicaciones, proveyendo la capacidad de controlar con precisión la pose del efector final.

Como líneas de investigación futura, este modelo cinemático validado es el pilar para el desarrollo y simulación de algoritmos de control de movimiento, planificación de trayectorias en el espacio de articulaciones y de tarea, y el análisis del espacio de trabajo del manipulador. El análisis puede extenderse para incluir el modelo dinámico del robot, lo que permitiría el diseño de controladores basados en par y el estudio del comportamiento del sistema bajo diferentes cargas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Corke, P. I. 1996. "A Robotics Toolbox for MATLAB." IEEE Robotics and Automation Magazine 3 (1): 24–32. <https://doi.org/10.1109/100.486658>.
- Gonçalves, Fernando, Tiago Ribeiro, António Fernando Ribeiro, Gil Lopes, and Paulo Flores. 2022. "A Recursive Algorithm for the Forward Kinematic Analysis of Robotic Systems Using Euler Angles." Robotics 11 (1). <https://doi.org/10.3390/robotics11010015>.
- Haviland, Jesse, and Peter Corke. 2024. "Manipulator Differential Kinematics: Part i: Kinematics, Velocity, and Applications [Tutorial]." IEEE Robotics and Automation Magazine 31 (4): 149–58. <https://doi.org/10.1109/MRA.2023.3270228>.
- Kucuk, Serdar, and Zafer Bingul. 2004. "The Inverse Kinematics Solutions of Industrial Robot Manipulators." Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, 2004. ICM '04., 274–79. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:19881919>.
- Liu, Fei, Guanbin Gao, Lei Shi, and Yongfeng Lv. 2017. "Kinematic Analysis and Simulation of a 3-DOF Robotic Manipulator." 2017 3rd International Conference on Computational Intelligence and Communication Technology (CICT), 1–5. <https://doi.org/10.1109/CICT.2017.7977291>.
- Maciel, JP, JB Acton, DA Lang Jr, and RK Nordeen. 1984. The National Shipbuilding Research Program: Evaluation of the Cincinnati Milacron t-3 Robot for Shipbuilding Welding.
- Suarez, Alejandro, Manuel Perez, Guillermo Heredia, and Anibal Ollero. 2021. "Cartesian Aerial Manipulator with Compliant Arm." Applied Sciences 11 (3). <https://doi.org/10.3390/app11031001>.
- Wang, Zhonglin, Ningbin Zhang, Xinxue Chai, and Qinchuan Li. 2017. "Kinematic/Dynamic Analysis and Optimization of a 2-URR-RRU Parallel Manipulator." Nonlinear Dynamics 88 (1): 503–19. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3256-5>.
- Yonezawa, Ansei, Heisei Yonezawa, and Itsuro Kajiwara. 2024. "Simple Inverse Kinematics Computation Considering Joint Motion Efficiency." IEEE Transactions on Cybernetics 54 (9): 4903–14. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2024.3372989>.
- Zhuang, H., Z. S. Roth, and F. Hamano. 1992. "A Complete and Parametrically Continuous Kinematic Model for Robot Manipulators." IEEE Transactions on Robotics and Automation 8 (4): 451–63. <https://doi.org/10.1109/70.149944>.